MATEMATICHE

FASCICOLO TERZO

TEMI D' ARITMETICA

TEMI

D'ARITMETICA

PER USO

Della Studiosa Gioventù

FASCICOLO TERZO

PISA
Presso Ranieri Prosperi
Tipografo della I. e R. Università
1839.

TEMA TERZO

Frazioni in generale; loro principali proprietà; e prime trè operazioni dirette ed inverse sulle medesime.

§. I.

Frazioni in generale, e loro principali proprietà.

1. Quel poco, che ne' due precedenti Temi abbiamo detto intorno ai numeri, è il fondamento di tutta l' Aritmetica. Tutto quello, che potremo dire in seguito relativamente a questa scienza, non sarà che una ripetizione di ciò che precede, convenientemente modificato od anche generalizzato secondo i differenti punti di vista, sotto i quali si ravviserà; di modo che in quello, che già sappiamo, ritroveremo press' a poco tutto ciò, che potremo imparare d' ora in avanti.

Quindi è che, ritornando ora colla mente sulle nostre idee, noi cominceremo soprattutto dal generalizzare la idea di numero, ch' è la principale di tutte.

Abbiamo detto da principio (Tema primo, §. I, N.° 1), che un numero si può riguardare come la *collezione* di più unità simili, intendendo per *unità* una cosa qualunque individuale.

Siccome niente impedisce di prendere per unità quella cosa, o *soggetto* individuale, che più ci pare e piace, così un numero *composto di quante mai si vogliano unità*, riguardandosi come rappresentante un *Tutto unico*, che sia la collezione o l' aggregato di coteste unità medesime, considerate come *Parti semplici*, si potrà esso stesso prendere, o considerare come una nuova unità, o *Soggetto composto*, atto a formare colla successiva ripetizione di se medesimo qualunque altro numero di unità composte uguali.

Perciò d' ora in avanti si potrà intendere per Numero anche *la collezione di più unità, ciascuna delle quali sia pure la collezione, o l' aggregato di quante altre mai si vogliano a piacere*.

Ma quì avvertiremo, che considerando questa seconda collezione come già fatta, la prima si giudicherà *come da farsi*, ossia un numero si riguarderà come la collezione *da farsi* di più altri numeri uguali; e sotto questo punto di vista un numero qualunque *scritto* si potrà considerare come un *Moltiplicatore* in una operazione di moltiplicazione *da eseguirsi* sopra un *Moltiplicando sottinteso* (ivi §. II, N.° 11), il qual moltiplicando, come numero, sarà sempre per noi *grande quanto mai si vorrà ad arbitrio*.

Quindi segue, che una o più cifre, ovvero uno o più *caratteri*, (che d' ora in avanti scriveremo sempre tutti equidistanti tra loro), oltre all' avere, a tenore delle convenzioni stabilite (ivi §. I, N.° 7), un valore semplicemente numerico, sì assoluto che relativo alla loro località respettiva, si potranno nello stesso tempo assumere collettivamente anche come la *caratteristica* di una operazione, cioè di una moltiplicazione da eseguirsi sopra un' altro numero arbitrario, che nel calcolo non comparirà scritto giammai, ma al quale cotesta caratteristica dovrà sempre mentalmente riferirsi.

Volendo così interpetrare una cifra, od un sistema di cifre, che presentino la *propria* idea di numero, noi intendiamo di accordare il medesimo significato anche alla cifra *elementare* 1, ed all' *ausiliare* 0 isolatamente (ivi 51 N.° 9.) talmentechè riguarderemo la prima come la caratteristica della moltiplicazione per *uno*, e la seconda come la caratteristica della moltiplicazione per *zero*; cioè significheremo colla prima, che il numero sottinteso si deve prendere *una volta sola*, e colla seconda *nessuna volta*.

2. Il numero sottinteso, a cui, come a moltiplicando, deve riferirsi il moltiplicatore, in quanto che si considera come una collezione *già fatta* od un' *aggregato* di unità, o *parti semplici* simili formanti un *Tutto unico*, noi lo chiameremo *numero concreto*. Il moltiplicatore poi considerato separatamente, od *astrattamente* dal moltiplicando, in quantochè denota una collezione *da farsi* si chiamerà in opposizione *Numero astratto*.

Intendendo noi di non considerare in seguito, che numeri astratti, i quali, come caratteristiche di operazioni da farsi sopra un numero arbitrario non hanno attualmente per se stessi alcun *valore numerico* preciso e determinato; e d' altronde volendosi o dovendosi fare sopra di essi delle operazioni simili a quelle praticate in addietro sopra numeri concreti, si concepisce bene, che basterà a tale oggetto, nell' atto della operazione, semplicemente riguardare cotesti primi numeri come concreti, ed a calcolo poi eseguito prendere od interpetrare i resultati come numeri astratti; ciocchè faremo vedere a suo luogo.

Del resto, se si riflette, che i numeri scritti considerati in addietro si riferivano ad una unità sola, ossia alla cifra, 1, come a segno di soggetto unico *concreto semplice*, mentre quelli, che si considerano ora, si riferiscono ad un' aggregato di più unità, ossia ad un sistema a piacere di cifre, come a segno di soggetto *concreto composto*, riferiti che si siano gli uni e gli altri colla nostra mente al loro soggetto respettivo, chiamandosi i primi *numeri concreti semplici*, potremo chiamare i secondi *numeri concreti composti*. Mentre dunque il numero sottinteso è un *numero concreto semplice*, i numeri, che d'ora in avanti si riguarderanno come concreti all' oggetto di praticar sopra di essi delle operazioni simili a quelle praticate in addietro, saranno per noi *numeri concreti composti*.

3. Come adesso, in virtù delle nostre convenzioni, in una cifra od in un sistema di cifre abbiamo sott' occhio la caratteristica della Moltiplicazione di un numero, che stà nascoso nella nostra mente, per quello rappresentato visibilmente da coteste cifre, così volendosi avere anche una caratteristica per la operazione *inversa*, cioè per la *Divisione* (Tema secondo § II. N. 10.), noi cominceremo primieramente dal supporre, che cotesto numero sottinteso sia esat-

tamente divisibile per qualunque altro numero imaginabile, o, come suol dirsi, sia sempre un *Dividendo perfetto*. Indi presa la cifra 1 per un semplice segno, atto a destarci soltanto la idea del numero sottinteso, come *unità composta*, e scrittala sopra al *taglio* —, preso per segno di *divisione*, noi scriveremo sotto al medesimo il numero, pel quale dovrà farsi la operazione, cioè il Divisore.

Così per esempio, se il divisore è 2, si scriverà $\frac{1}{2}$; se il divisore è 3 avremo il *simbolo* $\frac{1}{3}$; e così di seguito.

Ma per non parere di non osservar più le convenzioni già fatte (1), se la cifra 1 soprascritta al taglio in uno di cotesti simboli, invece di assumersi come un segno destinato semplicemente a richiamarci la idea di una *unità composta*, s' interpetra piuttosto come un moltiplicatore di questa, o del numero sottinteso da riferirglisi (1), si concepisce bene, che, scrivendo in luogo di una tal cifra 1, una o più altre cifre qualunque, il nuovo simbolo resultante potrà asssumersi per caratteristica di una *doppia operazione* da farsi sul numero sottinteso, cioè di una moltiplicazione di esso per quello soprascritto al taglio, e di una divisione del prodotto per quello scritto sotto; oppure viceversa, cioè di una divisione del medesimo numero sottinteso per quello sottoscritto, e di una moltiplicazione del quoziente per quello scritto sopra; giacchè queste due operazioni, una volta che si pratichino contemporaneamente sul numero sottinteso, possono tra loro investirsi, senza che il definitivo resultato nell' uno e nell' altro caso sia diverso: ed infatti è facile convincersi, che prender prima tanti numeri uguali al numero sottinteso, quante unità contiene il moltiplicatore, e poi di ciascuno di questi diviso in tante parti uguali, quante unità contiene il divisore, prendere una parte, sarà sempre lo stesso, che dividere prima il numero sottinteso in tante parti uguali quante unità contiene il divisore, e poi di queste parti, e d' altre uguali (se occorre d' altronde) prenderne tante, quante unità contiene il moltiplicatore.

In conseguenza pertanto delle nostre convenzioni si concepisce il significato de' simboli per esempio, che seguono

$$\frac{11}{111}, \quad \frac{101}{100}, \quad \frac{734}{101}, \ \ldots\ldots$$

Del resto riguardando in questi simboli il numero soprascritto al taglio come *già riferito* al numero sottinteso, ossìa come un segno del prodotto di questo numero per quello, essi si possono pure riguardare come simboli del quoziente respettivo di cotesto numero concreto soprascritto diviso pel numero sottoscritto. Per un tal motivo il primo per esempio di cotesti simboli, cioè $\frac{11}{111}$, si suol leggere, o pronunziare *undici diviso per centundici*; e così degli altri, come se in essi il taglio fosse semplicemente un segno di divisione dei numeri soprascrittigli per quelli sottoscrittigli.

4. Siccome il numero sottinteso, nella nostra ipotesi di dividendo perfetto (3), coll' attual divisione per un' altro *si frange*, per così dire, precisamente in tanti numeri parziali uguali, quante unità contiene il divisore, così ai simboli o caratteristiche precedenti si suol dare il nome di *Frazioni*, sebbene fosse meglio dar loro quello di *Frangenti*, riguardandole secondo le nostre convenzioni (3) come caratteristiche di operazioni *da eseguirsi*, piuttostochè espressioni di resultati *ottenuti* per coteste operazioni medesime; ma noi, conservando loro sempre il nome di *Frazioni*, le distingueremo in *astratte* e *concrete*, secondochè si riguarderanno sotto il primo, o sotto il secondo punto di vista.

Le frazioni riguardate come concrete si sogliono chiamare *numeri fratti* o *frazionarii*, ed anche *numeri rotti*, o semplicemente *Rotti*.

In opposizione un numero qualunque, concreto o nò, che non sia, o non si consideri come il resultato, o quoziente esatto di divisione alcuna; oppure, che per valutarlo come concreto non bisogni riguardare il numero sottinteso come spezzato in parti, dicesi *numero intiero*, o semplicemente un *Intiero*.

Chiamandosi *duplo*, *triplo*, *quadruplo*,... e generalmente *multiplo* di un numero un' altro numero, che sia il prodotto del primo respettivamente moltiplicato per 2, 3, 4,.. e generalmente per un terzo numero qualunque, e nello stesso tempo chiamandosi reciprocamente *subduplo*, *subtriplo*, *subquadruplo*,.. e generalmente *submultiplo* di un numero un' altro numero, che sia il quoziente esatto del primo respettivamente diviso per 2, 3, 4,.. e generalmente per un terzo numero qualunque, mentre un numero intiero sarà o denoterà un *certo multiplo* del numero sottinteso, si può dire, che una frazione qualunque denoti *un certo multiplo di un submultiplo*, od anche *un certo submultiplo di un multiplo*, *preso* o *da prendersi sul numero sottinteso medesimo*.

5. In una frazione servendosi del numero sottoscritto al taglio per *denominare la specie*

delle parti, o la *parte* che per mezzo di esso, come divisore, si prende del numero sottinteso, e servendosi di quello soprascritto per *numerare* o contare le volte, che una tal parte per mezzo di questo, come moltiplicatore si ripete, noi chiameremo il primo di cotesti numeri *Denominatore* ed il secondo *Numeratore* della frazione, e l' uno e l' altro considerati congiuntamente si diranno i *Termini* della frazione medesima. Le parti poi, che per mezzo di una frazione si prendono sul numero sottinteso, si numerano con suoni articolati coll' enunciar semplicemente il numeratore, e si denominano coll' enunciare il denominatore, aggiungendo all' enunciato di questo secondo numero generalmente la finale *esimi*; se non che esse si specificano coi nomi di *mezzi*, *terzi*, *quarti*, *quinti*, *sesti*, *settimi*, *ottavi*, *noni*, *decimi*, nel caso particolare, in cui il denominatore sia respettivamente

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;

e nell' uno e nell' altro enunciato successivo consiste quello della frazione, che si considera.

Così, mentre la frazione per esempio $\frac{10}{11}$ si pronnnzia *dieci undicesimi*, la frazione $\frac{11}{10}$

(che dicesi *inversa* a quella, perchè ha i suoi termini invertiti), si pronunzia *undici decimi*. Del resto la frazione $\frac{10}{11}$ per quello, che precede (3), si può anche pronunziare o leggere *un' undicesimo di dieci*, e la sua inversa $\frac{11}{10}$ *un decimo di undici*.

Prima di proseguir oltre sarà bene l' avvertire, che il numero sottinteso essendo capace di esser diviso, egualmentechè moltiplicato, per 1, vale a dire, la cifra 1 potendosi egualmente prendere per un divisore, che per un moltiplicatore del numero sottinteso (3), ad un numero qualunque intiero si può dare l' aspetto di frazione, di cui il denominatore sia 1. Allora per esempio il numero intiero 3, ponendosi sotto la forma $\frac{3}{1}$,sotto questa si pronzierà *trè unesimi*; ed in luogo della cifra 1 scrivendosi $\frac{1}{1}$ questo simbolo si pronunzierà *un' unesimo*. Inoltre riflettendo, che il significato od il valore di un numero intiero rimane sempre lo stesso moltiplicandolo e dividendolo contemporaneamente per un' altro (Tema secondo, pag. 4, 24), un *Intiero* qualunque si potrà anche porre sotto l' aspetto di *Rotto*, o di frazione di un denominatore *dato*, col moltiplicarlo prima per questo numero, e collo scriver poi questo numero stesso sotto al prodotto, separato da un taglio. Così volendo cangiare per esempio in *settimi* l'Intiero 3, si avrà la frazione $\frac{21}{7}$.

Con questo modo di scrivere ci persuadiamo, che tutto quello che diremo, o praticheremo in seguito intorno alle frazioni, potrà essere esteso, come a caso particolare, anche ai numeri intieri isolati, o congiunti con delle frazioni.

6. Passiamo adesso ad accennare alcune delle principali proprietà delle frazioni in generale.

Dalla origine delle frazioni emergono le seguenti loro proprietà.

« 1.ª Secondo che il numeratore di una fra-
» zione è uguale, minore, o maggiore del deno-
» minatore, il di lei *valore*, ossìa cotesta fra-
» zione riguardata come concreta (4), è pure
» respettivamente uguale, minore, o maggiore
» del numero sottinteso, che hà 1 per caratteri-
» stica, ossìa del *valore* della cifra 1. »

Ed infatti, imaginandosi spezzato il numero sottinteso in tanti numeri parziali uguali, quante unità contiene il denominatore di una proposta frazione, è chiaro, che per avere il di lei valore nel primo caso si prenderanno tutti cotesti numeri; nel secondo se ne rigetteranno alcuni, e nel terzo dovrà ripetersi uno di essi un numero di volte maggiore del loro numero totale.

Così per esempio il valore di tutte le frazioni $\frac{1}{1}$, $\frac{11}{11}$, $\frac{107}{107}$, . . è lo stesso di quello di 1; ma quello di $\frac{7}{11}$ è più piccolo, e quello di $\frac{15}{11}$ è più grande del valore di 1, ossìa del numero sottinteso; per questo motivo quelle frazioni, che hanno il numeratore uguale o maggiore del denominatore, diconsi *improprie*, mentre quelle che lo hanno minore, sono *frazioni proprie*, cioè *parti* del numero sottinteso.

« 2.ª Secondo che cresce o diminuisce il nu-
» meratore di una frazione proposta, restando
» fisso o *costante* il denominatore, il di lei valo-
» re pure cresce o diminuisce; e secondochè cresce
» o diminuisce il denominatore, restando fisso o
» *costante* il numeratore, il di lei valore vice-
» versa diminuisce o cresce »

Ed infatti nel primo caso si prenderanno più o meno numeri parziali uguali trà loro, e nel secondo di un numero parziale più piccolo o più grande si prenderà un multiplo medesimo, perchè in questo caso il numero sottinteso spezzandosi in più o meno numeri parziali uguali, ognuno di questi riesce più o meno piccolo.

Così per esempio la frazione $\frac{7}{11}$ è minore di $\frac{9}{11}$, egualmentechè di $\frac{7}{9}$.

In virtù di questa proprietà 2.ª è facile convincersi, che moltiplicando per un certo numero il numeratore di una frazione, oppure dividendo per esso (quando si può esattamente) il denominatore, non si fà che prendere un certo multiplo del valore di cotesta frazione; e viceversa, moltiplicando per un certo altro numero il denominatore, oppure dividendo per esso (quando si può esattamente) il numeratore, non si fà che prendere un cert' altro submultiplo del valore della medesima frazione. Se dunque i due numeri, pei quali si moltiplicano o si dividono i termini di una frazione, sono i medesimi, il di lei valore dopo l' una è l' altra operazione rimarrà inalterato.

» 3.ª Secondo chè in una frazione proposta
» cresce o diminuisce insieme *ugualmente* il
» numeratore ed il denominatore, il di lei valore
» pure cresce o diminuisce, se il primo è minor
» del secondo, cioè se la frazione è *propria*; ma
» se il primo è maggior del secondo, ossìa
» se la frazione è *impropria*, il di lei valore al
» contrario diminuirà o crescerà.

Così per esempio $\frac{7}{11}$ sarà minore di $\frac{11}{15}$, e maggiore di $\frac{4}{8}$; ma $\frac{11}{7}$ sarà viceversa maggiore di $\frac{15}{11}$, e minore di $\frac{8}{4}$.

Ed infatti, imaginandosi spezzato al solito il numero sottinteso in tante parti uguali, quante unità contiene il denominatore di una frazione, se in questa il numeratore è minore del denominatore, è chiaro, che per averne il valore basterà prendere di tutte coteste parti tante di meno, quante unità contiene l' eccesso del denominatore sul numeratore; e, se il numeratore è maggiore, bisognerà d'altronde prenderne od *accattarne*, per dir così, d'altronde tante di più, quante unità contiene l' eccesso del numeratore sul denominatore.

Ora, siccome crescendo, o diminuendo egualmente i due termini di una frazione qualunque, l' eccesso dell' uno sull' altro è visibilmente sempre lo stesso, così in questo caso il numero delle parti, che si prenderanno di meno o di più del loro numero totale, sarà pure sempre lo stesso.

Quindi segue evidentemente, che riuscendo più o meno piccola ciascuna parte del numero sottinteso, secondochè i termini di una frazione sono cresciuti o diminuiti, il valore della somma di quelle parti, che si rigettano nel primo caso, o di quelle, che si prendono di più nel secondo, riuscirà più o meno piccolo; e però il valore della frazione *propria*, pel quale si prendono meno parti del loro numero totale, riuscirà viceversa più o meno grande, ossìa crescerà o diminuirà; e quello della frazione *impropria*, pel quale se ne prendono di più, riescirà più o meno piccolo, ossìa diminuirà o crescerà.

Nel caso particolare, in cui i due termini di una frazione fossero uguali, allora, non avendo essi l' uno sull' altro eccesso alcuno, per un aumento o decremento medesimo d'ambedue, il valore di una tal frazione rimarrebbe pure sempre il medesimo, e sarebbe quello della cifra 1, come quì sopra si è visto.

7. Affinchè il valore di una frazione qualunque non crescesse o diminuisse, ossìa rimanesse *costante*, per un qualchè aumento o decremento diverso de' suoi termini, basterebbe generalmente che quest' aumento o decremento fosse tale, che le parti del numero sottinteso che si rigettassero, o che se ne prendessero di più, divenendo due, trè, quattro, .. volte più piccole o più grandi ciascuna, il loro numero divenisse al contrario respettivamente due, trè, quattro .. volte più grande, o più piccolo. Siccome dunque l' eccesso del numeratore sul denominatore, o viceversa, diventa due, trè, quattro .. volte

più grande, quando due, trè, quattro, . . volte più grande diventa ciascuno di cotesti termini, com' è facile convincersene; e nel medesimo tempo le parti, nelle quali si spezza il numero sottinteso diventano respettivamente due, trè, quattro, . . volte più piccole ciascuna, quando più grande pure due, trè, quattro, . . volte diventa il denominatore, così una frazione, nel caso d' aumento de' suoi termini, non cangerà valore, se d' ambedue si prenda un multiplo medesimo.

Parimente, siccome l' eccesso del numeratore sul denominatore o viceversa, diventa due, trè, quattro, . . volte più piccolo, quando due, tre, quattro, . . volte più piccolo pure diventa ciascuno di cotesti termini; e le parti, nelle quali si spezza il numero sottinteso diventano contemporaneamente due, tre, quattro, . . volte più grandi ciascuna, quando più piccolo pure due, trè, quattro, . . volte diventa il denominatore, così una frazione, nel caso di decremento de' suoi termini, non cangerà valore, se d' ambedue si prenda, (quando è possibile,) un submultiplo medesimo.

Quindi consegue anche quest' altra general proprietà delle frazioni, già di sopra avvertita.

« 4.ª Che moltiplicando, o dividendo (se » si può esattamente) ambedue i termini di

» una frazione per uno stesso numero, il di lei » valore non si altera »

8. In virtù di questa ultima proprietà due o più frazioni di denominatore diverso si possono ridurre tutte ad avere lo stesso denominatore, senza che il loro valore si alteri.

Le due frazioni per esempio $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ si riducono alle due equivalenti respettive $\frac{14}{21}$, $\frac{15}{21}$ *moltiplicando i termini dell' una pel de nominatore dell' altra*.

Generalmente, date quante mai si vogliano frazioni di denominatore diverso, *moltiplicando successivamente i termini di ciascuna per i denominatori di tutte le altre*, resulteranno altrettante *trasformate*, che avranno ciascuna respettivamente il medesimo valore delle date, e tutte uno stesso denominatore *comune*, che sarà il prodotto di tutti i denominatori di quelle; per la ragione, che il prodotto di quanti mai si voglian fattori resulta sempre lo stesso in qualunque ordine questi si moltiplichino trà loro (Tema primo § II. N. 14.)

Così il prodotto di tutti i denominatori delle cinque frazioni per es. seguenti

$$\frac{3}{8},\ \frac{7}{11},\ \frac{10}{13},\ \frac{23}{25},\ \frac{29}{43}$$

essendo 1229800, ed i prodotti de' medesimi, eccettuati ad uno per volta, il primo, il secondo, il terzo, il quarto, il quinto, essendo pure respettivamente

153725, 111800, 94600, 49192, 28600,

se si moltiplica per ciascuno di questi ciascun respettivo numeratore, ed a ciascun prodotto si dà per denominator comune il prodotto precedente 1229800, resulteranno le cinque trasformate equivalenti, che seguono, molto complicate.

$$\frac{461175}{1229800},\ \frac{782600}{1229800},\ \frac{94600}{1229800},\ \frac{1131416}{1229800},\ \frac{829400}{1229800}$$

Nella operazione precedente consiste la così detta *Riduzione delle Frazioni al medesimo Denominatore*.

9. Siccome si può giudicare, che cotesta riduzione si faccia col moltiplicare il numeratore di una frazione delle date pel quoziente esatto del denominator comune a tutte le trasformate, diviso pel respettivo denominatore delle prime, così in quei casi, nei quali si abbia un numero possibilmente il più piccolo del prodotto di tutti i denominatori, che sia divisibile esattamente per ciascuno

delle date, noi otterremo le trasformate equivalenti sotto la forma meno complicata possibile.

Nel caso particolare per es. delle nove frazioni seguenti

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{10}, \frac{7}{15}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{12}$$

trovandosi 120 pel numero più piccolo possibile, esattamente divisibile per ciascun denominatore, se per ciascuno dei nove quozienti

$$60, 40, 24, 20, 12, 8, 30, 15, 10,$$

si moltiplica ciascun respettivo numeratore, si avranno le nove trasformate equivalenti, che seguono

$$\frac{60}{120}, \frac{80}{120}, \frac{72}{120}, \frac{100}{120}, \frac{84}{120}, \frac{56}{120}, \frac{30}{120}, \frac{45}{120}, \frac{30}{120}$$

dello stesso denominatore 120.

È facile persuadersi, che i casi, de' quali si parla, accaderanno, allorchè i denominatori delle frazioni date considerati come prodotti composti di fattori *semplici*, cioè di fattori, che non siano divisibili ciascuno esattamente, che per se stessi e la unità, ne avranno dei comuni trà loro; giacchè formando a parte un prodotto, nel quale entri soltanto ciascun fattor semplice comune a ciascun denominatore, tante volte, quante basta, e *non più*, esso sarà il numero più piccolo *possibile*, che si cerca.

Così nell' esempio precedente i denominatori *composti* 6, 10, 15, 4, 8, 12 decomponendosi nei loro fattori semplici, cioè respettivamente in 2, 3; in 2, 5; in 3, 5; in 2, 2; in 2, 2, 2; in 2, 2, 3, tra' quali si trovano anche i trè primi denominatori semplici 2, 3, 5, si vede a colpo d' occhio, che formandosi il prodotto de' soli fattori semplici 2, 2, 2, 3, 5, cioè il prodotto 120, questo sarà il più piccolo possibile, capace di esser diviso esattamente per ciascun denominatore di tutte quelle frazioni.

10. All' oggetto di ottenere tutti i fattori semplici, ne' quali può decomporsi un numero dato, nella ipotesi che sia un prodotto o numero composto, noi scriveremo primieramente l' uno dopo l' altro, a cominciar dai più piccoli, alcuni di quei numeri, che si riscontra non esser divisibili esattamente per alcun altro *numero* diverso; e che saranno i seguenti

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Indi, a cominciare dal primo

1.° Tentando la divisione esatta per 2 del numero dato, poi del quoziente, . . . finchè si può, scriveremo a parte la cifra 2, ripetuta tante volte, quante sono state le divisioni fatte.

2.° Tentando la divisione esatta per 3 dell' ultimo quoziente, poi del successivo, ... finchè si può, scriveremo pure a parte la cifra 3, ripetuta anch' essa tante volte, quante sono state le divisioni fatte per lei.

3.° Tentando la divisione esatta per 5 dell' ultimo quoziente, poi del successivo, . . finchè si può, scriveremo pure a parte la cifra 5, ripetuta anch' essa nel modo stesso; e così di seguito.

Sia per es. 5880 il numero dato. Io dispongo la operazione come segue

$$\begin{array}{r|l} 5880 & 2 \\ 2940 & 2 \\ 1470 & 2 \\ 735 & 3 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \end{array}$$

dove il numero dato ed i successivi quozienti sono scritti a sinistra, ed i divisori semplici corrispondenti a destra della linea verticale tirata.

Del resto è facile persuadersi, che i numeri da tentarsi per divisori semplici non possono superare la radice del più gran quadrato contenuto nel respettivo dividendo, perchè se vi fosse un divisore più grande di cotesta radice, siccome il di lui quadrato, cioè il suo prodotto per se stesso, supererebbe il dividendo, bisognerebbe, che vi fosse anche un altro divisore più piccolo; ciò che non si suppone.

Quindi è che, se dopo aver tentati tutti i divisori semplici minori, od almeno non maggiori, della radice quadrata del corrispondente dividendo, non se ne fosse trovato alcuno divisore esatto di lui, sarebbe inutile proseguire il tentativo; e cotesto dividendo dovrebbe considerarsi come un fattor semplice.

11. Volendo, invece della riduzione al medesimo *denominatore* di più frazioni, far piuttosto quella al medesimo *numeratore*, è facile convincersi, che, come la prima si fà col moltiplicare i termini di ciascuna frazione pel prodotto de' *denominatori* di tutte le altre, oppure pel quoziente esatto del numero il più piccolo possibile, capace di esser diviso esattamente pel *denominatore* respettivo, così si farà anche la seconda col moltiplicare i termini di ciascuna frazione pel prodotto dei *numeratori* di tutte le altre, oppure pel quoziente esatto del numero il

più piccolo possibile, capace di esser diviso esattamente pel *numeratore* respettivo.

Così per es., date le sei frazioni

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{6}{11}, \frac{8}{13}, \frac{12}{17},$$

e trovato 24 pel più piccolo numero possibile, capace di esser diviso esattamente pei numeratori 2, 3, 4, 6, 8, 12, se per i respettivi quozienti 12, 8, 6, 4, 3, 2. si moltiplicano i termini di coteste frazioni, avremo le sei trasformate seguenti

$$\frac{24}{60}, \frac{24}{32}, \frac{24}{42}, \frac{24}{44}, \frac{24}{39}, \frac{24}{34}$$

Siccome trà le frazioni del medesimo denominatore ha un più gran valore quella, che ha il numeratore più grande, ed al contrario trà le frazioni del medesimo numeratore lo hà più piccolo quella, che ha più grande il denominatore (6), così è utile ridurre più frazioni al medesimo denominatore, o numeratore per vedere quale di esse hà un maggiore o minor valore.

Delle due frazioni per es. $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ la seconda è più grande della prima, o la prima è più piccola della seconda, perchè ridotte al medesimo denominatore si trasformano nelle due $\frac{14}{21}$, $\frac{15}{21}$, o perchè ridotte al medesimo numeratore si trasformano nelle due $\frac{10}{15}$, $\frac{10}{14}$.

La riduzione però al medesimo denominatore è la più utile, perchè con questa si vede inoltre di quanto una frazione supera un' altra. Nell' esempio precedente la seconda frazione supera la prima di $\frac{1}{21}$.

12. In virtù della medesima proprietà 4.ª di sopra (7) una frazione, i di cui termini ammettano un divisore esatto comune, si riduce ad un' altra più semplice equivalente.

Così la frazione molto complicata $\frac{39324}{58986}$, i di cui termini sono esattamente divisibili per 2, si riduce alla equivalente $\frac{19662}{29493}$; questa, i di cui termini sono esattamente divisibili per 3, si riduce a $\frac{6554}{9831}$; questa i di cui termini sono divisibili esattamente per 29, si riduce a $\frac{226}{339}$; e finalmente questa, i di cui termini sono esattamente divisibili per 113, si riduce a $\frac{2}{3}$, frazione molto semplice in paragone della proposta.

Se avessimo immediatamente divisi l' uno e l' altro termine della proposta frazione pel prodotto di tutti quattro i loro comuni divisori semplici 2, 3, 29, 113, ossia pel *massimo lor divisor comune* 19662 (supposto preventivamente determinato mediante sicuro processo di calcolo), noi avremmo ottenuto più speditamente, e senza tentativo alcuno, il nostro intento; giacchè dividendo attualmente ciascuno de' due numeri 39324, 58986 per 19662, ed avuti i due respettivi quozienti 2 e 3, si otterrebbe subito la frazione molto semplice $\frac{2}{3}$ in luogo della proposta molto complicata.

Si vede dunque, che sarebbe utilissimo l' avere un processo sicuro, onde saper direttamente assegnare il massimo divisore, comune a due numeri dati, quando questi l' avessero.

13. All' oggetto d' investigare un tal processo io ragiono così.

Siccome il massimo divisore, comune a due numeri dati, non può esser che un fattor comune de' medesimi, considerati come prodotti ciascuno di esso per un' altro fattore, così l' uno e l' altro di tali numeri, riguardandosi come la somma di più altri numeri, uguali ciascuno a cotesto stesso primo fattore comune (Tema I.°, pag. 33), si può imaginare come decomposto per addizione in più altri numeri parziali, uguali ciascuno al massimo comun divisore, che si cerca.

Quindi, nella ipotesi che trà due numeri dati esista un massimo divisor comune, segue evidentemente

Che, sottraendo il più piccolo dal più grande *tante volte, quante si può*, ossìa *dividendo* questo secondo numero pel primo (Tema II.°, pag. 24), bisognerà, che il resto della operazione contenga esattamente un certo numero di volte il massimo comun divisore, che si cerca.

Che, sottraendo un tal resto dal numero più piccolo *tante volte, quante si può*, ossìa *dividendo* il numero più piccolo pel resto trovato, bisognerà che il nuovo resto, che si trova, contenga anch' esso esattamente il massimo comun divisore, che si cerca, un certo numero di volte, ma minore di quello, che lo conteneva il resto precedente:

Che, sottraendo pure questo secondo resto dal primo *tante volte, quante si può*, ossia *dividendo* il primo resto pel secondo, bisognerà pure, che il terzo resto, che si trova, contenga anch' esso esattamente il massimo comun divisore, che si cerca, un certo numero di volte, ma minor pure di quello, che lo conteneva l' ultimo resto precedente.

E così di seguito.

Quindi è, che nella ipotesi, che frà i due numeri dati esista un massimo comun divisore, si arriverà finalmente dopo un certo numero di divisioni ad un resto, maggior di 1, che sarà questo stesso divisor massimo; giacchè, diminuendo successivamente il numero delle volte, ch' esso è contenuto in ciascun resto ulteriore, bisogna, che si arrivi finalmente ad un resto tale, che lo contenga *una volta sola*; e questo resto dividerà esattamente il precedente a lui.

Pertanto per la ricerca del massimo divisore, comune a due numeri dati, si propone la seguente regola.

« Dividete il più grande pel più piccolo;
« questo pel resto, che trovate; il primo resto
« pel secondo; il secondo pel terzo; e così di
« seguito, finchè non abbiate resto alcuno. L' ul-
« timo resto, che avrà servito di divisore, sarà
« il massimo divisor comune, che cercate ».

Ecco il tipo del calcolo pe' due numeri 799, 2961, il quale io dispongo all' uopo, come segue

	3	1	2	2	2	
2961	799	564	235	94	47	0,

scrivendo cioè ciascun Divisore a *destra* di ciascun Dividendo, e però ciascun Resto a *destra* pure di ciascun Divisore, e sopra questo il Quoziente corrispondente.

Apparisce dunque in quest'esempio, che 47 è il massimo divisor comune ai due numeri 799, 2961; e che perciò la frazione $\frac{799}{2961}$, dividendo i suoi termini per 47, *si riduce* alla più semplice $\frac{17}{63}$.

Nel caso, che i due numeri dati non ammettessero massimo comun divisore alcuno, si può osservare, che, siccome 1 è divisore *esatto* di tutti i numeri possibili, allora eseguendo la operazione prescritta si troverebbe 1 per resto ultimo, e questo sarebbe, o simulerebbe il massimo comun divisore voluto.

Ecco il tipo del calcolo pe' due numeri 317, 873, dal quale apparisce, ch' essi sono in tal caso

	2	1	3	15	1	1	2
873	317	239	78	5	3	2	1

Eccone un'altro pe'due numeri 16768, 252801, i quali si trovano nel caso medesimo

	15	13	11	7	5	3
252801	16768	1281	115	16	3	1

Quando due numeri dati si trovano in questo caso, il quale non siasi preventivamente riconosciuto, è cosa spiacevole l' aver fatto un calcolo inutile per la ricerca del loro massimo comun divisore; ma è facile persuadersi, che, se nel corso della operazione si giunge ad un resto, che subito si riconosca non esser divisibile, che per se stesso e la unità, e che non divida esattamente il resto precedente a lui, siamo sicuri, che il *massimo* comun divisore voluto non esiste.

14. Dalla disposizione, che noi abbiamo data al calcolo per la determinazione attuale del massimo comun divisore trà due numeri dati, chiaramente apparisce, che, siccome ogni dividendo si può riguardare come la somma del prodotto del divisore pel quoziente respettivo, e del resto della divisione (Tema secondo, § III, N. 2), così, a cominciar da destra sul tipo del calcolo fatto, se a ciascun prodotto del numero inferiore alla linea orizzontale pel superiore corrispondente si aggiunge l' inferiore immediatamente a destra, si avrà l' inferiore immediatamente a sinistra, dimodochè per mezzo soltanto de' numeri superiori, cioè de' quozienti, e dell' ultimo inferiore a destra, cioè del massimo comun divisor trovato, si potranno successivamente ritrovare tutti gl' inferiori a si-

nistra, e finalmente i due numeri dati, anche nella ipotesi, che questi non ammettessero massimo comun divisore, maggiore di 1.

Questa osservazione ci pone in grado di assegnar direttamente i termini, ai quali si riducono quelli di una proposta frazione dopo averli divisi ambedue pel massimo loro comun divisore, che siasi ritrovato maggiore di 1, senza star a fare attualmente questa doppia operazione; e ciò collo scriver soltanto in luogo del massimo comun divisore trovato, o sotto ad esso, la cifra 1; e poi operando, a cominciar da essa, sù i numeri superiori già ottenuti per quozienti, come se si trattasse di ritrovare o verificare i dividendi o divisori precedenti, e finalmente i due numeri dati, nel caso che per massimo comun divisore trà questi si fosse trovato 1. Ed infatti, sebbene in questo secondo caso i numeri, nei quali si può riguardar come decomposto per addizione ciascuno de' due dati, riescano tutti uguali ad 1, pure restando essi di numero sempre tanti, quanti nel primo caso, il numero delle possibili sottrazioni del numero più piccolo dal più grande, e di ciascun resto dal precedente, ossìa ciascun quoziente successivo della operazione, rimarrà sempre lo stesso in ambedue i casi.

Ecco il tipo del calcolo pel primo esempio precedente

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c}
 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
2961 & 799 & 564 & 235 & 94 & 47 \\
63, & 17, & 12, & 5, & 2, & 1,
\end{array}$$

ove i *termini ridotti* 17, 63 corrispondono respettivamente in colonna ai dati 799, 2961; e però la frazione $\frac{799}{2961}$ si riduce a $\frac{17}{63}$, come sopra (13).

15. Nel modo stesso, con cui abbiamo investigato il processo per la determinazione del massimo comun divisore trà due numeri dati, si può anche dimostrare, che, se ognuno di essi è divisibile esattamente per un terzo numero diverso da un tal comun divisore, ch' essi abbiano, questo sarà pure divisibile esattamente per quel terzo numero.

Infatti, imaginando ora il numero più grande come decomposto per addizione in più numeri uguali ciascuno al più piccolo, ed inoltre nel primo resto della operazione fatta per la ricerca del massimo comun divisore; il numero più piccolo in più altri uguali ciascuno al primo resto, ed inoltre nel secondo resto; e così di seguito, si vede chiaramente, che sottraendo il numero più piccolo dal più grande, finchè si può, il primo resto conterrà esattamente una o più volte quel terzo numero; e quindi, sottraendo un tal resto dal numero più piccolo, finchè si può, il secondo resto conterrà pure esattamente una o più volte quel medesimo terzo numero; e così di seguito fino al resto ultimo, ch'è il massimo comun divisore trà i due numeri dati.

In conseguenza di ciò, un numero, che non hà alcun fattore o divisore comune con un'altro, chiamandosi *primo* con questo, si può facilmente dimostrare la seguente importante proposizione.

« Se più numeri sono dati *primi* separa-
« tamente con un'altro, non potrà mai per
« questo numero dividersi esattamente il loro
« prodotto; ovvero un tal prodotto sarà pure
« *primo* collo stesso numero ».

Infatti, siano primieramente due soltanto i numeri dati, e si abbia un terzo numero, col quale essi siano *primi* separatamente.

Applicando al primo ed al terzo di questi numeri il processo del massimo comun divisore, bisognerà, che dopo un primo, secondo, terzo, ... resto si ottenga finalmente 1 pel resto ultimo (13, 14).

Dunque, se, invece che al primo ed al terzo numero, si applicasse il medesimo processo al prodotto del primo pel secondo, ed al prodotto del terzo pel secondo stesso, allora ottenendosi pure in questa seconda operazione i quozienti medesimi de' precedenti (14), i nuovi successivi resti sarebbero respettivamente ciascuno il prodotto de' precedenti moltiplicati pel secondo numero; e perciò l' ultimo resto sarebbe questo stesso secondo numero.

Dunque il massimo comun divisore trà il prodotto del primo pel secondo numero, e quello del terzo pel secondo, oppure del secondo pel terzo, sarebbe lo stesso secondo numero.

Ora, se si supponesse, che il prodotto del primo pel secondo numero fosse esattamente divisibile pel terzo, come lo è evidentemente quello del secondo pel terzo, in conseguenza di ciò, che precede, bisognerebbe, che anche il massimo comun divisore fra questi due prodotti, (il quale si è trovato essere il secondo numero), fosse esattamente divisibile pel terzo; lo che è impossibile, perchè anche il secondo numero, egualmentechè il primo, è reputato *numero primo* col terzo.

Siano in secondo luogo trè i numeri dati; e si abbia un quarto numero, col quale essi siano *primi* separatamente. Imaginando fatto del secondo e del terzo il prodotto, e considerando questo prodotto come un secondo numero dopo il primo, è chiaro, ch' essendo per quel, che precede, anche un tal numero primo col terzo, (ch' è veramente il quarto dato), noi siamo ricondotti al caso precedente.

Si vede, come bisognerebbe comportarsi per la dimostrazione, se quattro o più numeri fossero dati *primi* separatamente con un altro; e però la nostra proposizione si estende ad un numero qualunque di fattori.

Nel caso particolare, che questi fattori siano tutti trà loro uguali, si conclude

« Che una potenza qualunque di un numero,
« *primo* con un altro, è pure *numero primo*
« con lui ».

E quindi

« Che due potenze medesime o diverse di due
« numeri *primi* trà loro sono parimente trà loro
« due *numeri primi* ».

Del resto si può notare, che quando un numero è *primo* con tutti i numeri più piccoli di lui, ossia quando non è divisibile esattamente che per se stesso e la unità, si suol chiamare *Primo assoluto*, o semplicemente *Primo*.

16. La proposizione precedente, a rigore dimostrata, serve per noi ad uno scopo interessante, ch' è quello di convincerci, che, dopo avere spogliati i termini di una frazione del loro massimo divisore comune, (con che essi sono

divenuti *primi* tra loro), è oramai impossibile di ridurre ulteriormente cotesta frazione ad un' altra equivalente di forma più semplice, ossia di termini *più piccoli*.

Infatti 12 e 17 per es., termini della frazione $\frac{12}{17}$, essendo *primi* trà loro, se si supponesse, ch' essa si potesse ridurre ad un' altra, i di cui termini fossero più piccoli, potrebbe accadere, che il numeratore di questa fosse *primo*, o non fosse *primo* col numeratore di quella, come per es. il numeratore della frazione $\frac{7}{8}$, o $\frac{9}{11}$.

Nel primo caso, riducendo al medesimo denominatore le due frazioni $\frac{12}{17}$, $\frac{7}{8}$, *equivalenti per ipotesi*, bisognerebbe, che il prodotto di 12 *per* 8, o di 8 *per* 12, equivalesse al prodotto di 7 *per* 17; e che in conseguenza il prodotto di 7 *per* 17, numeri *primi* ciascuno separatamente con 12, fosse esattamente divisibile per questo numero; ciò che si è dimostrato impossibile.

Nel secondo caso, riducendo al medesimo denominatore le due frazioni $\frac{12}{17}$, $\frac{9}{11}$, *equivalenti pure per ipotesi*, bisognerebbe, che il prodotto di 12 *per* 11, o di 11 *per* 12, equivalesse al prodotto di 9 *per* 17, o di 17 *per* 9; oppure, *met-*

tendo in evidenza il massimo comun divisore 3 trà 9 e 12 (con che 4 diviene *primo* con 3), bisognerebbe che il prodotto di 11 *per* 4 *per* 3 equivalesse a quello di 17 *per* 3 *per* 3; e che perciò anche il prodotto di 11 *per* 4 equivalesse a quello di 17 *per* 3; ed in conseguenza, che il prodotto di 17 *per* 3, numeri *primi* ciascuno separatamente con 4, fosse divisibile esattamente per questo numero; ciò ch' è pure impossibile.

Dunque ec.

Quindi è che, quando una frazione è ridotta ad avere i suoi termini *primi* trà loro mediante la *estrazione* da ambedue del loro massimo comun divisore, si suol dire, ch' essa è *ridotta ai minimi termini*, e che in questo stato *è irreducibile*.

Del resto è facile persuadersi, che la medesima dimostrazione avrebbe luogo anche nel caso, che i due termini di una frazione, equivalente per ipotesi ad una proposta, (i termini della quale fossero già *primi* trà loro), si volessero più grandi, e non multipli medesimi di questi secondi: d' onde consegue, che, acciò due frazioni possano essere trà loro equivalenti, *è necessario e basta*, che i termini dell' una siano de' multipli, o submultipli medesimi de' respettivi termini dell' altra, e che perciò, proposte due frazioni equivalenti trà loro, se sene forma una terza colla somma, o colla differenza de' loro respettivi termini, cotesta terza frazione sarà pure equivalente a ciascuna di quelle due.

Così i termini della frazione per es. $\frac{6}{9}$ essendo *tripli* di quelli della frazione $\frac{2}{3}$, anche la frazione $\frac{8}{12}$, come pure la frazione $\frac{4}{6}$, sarà equivalente alla frazione medesima $\frac{2}{3}$.

§ II.

Prime trè operazioni dirette ed inverse sulle Frazioni.

1. Generalizzata, come abbiam fatto (§ precedente, n.° 1), la idea di numero; ed acquistata la nozione di numeri intieri e frazionarii (ivi n.° 4), noi generalizzeremo anche la idea delle *Operazioni dirette ed inverse* da farsi sopra gli uni e gli altri, col richiamare ad un medesimo punto di vista più generale e quelle, che nel primo e secondo Tema si possono riguardare come insegnate intorno ai primi, e quelle che nel Tema presente si tratta d' insegnare intorno ai secondi.

Ed in primo luogo chiamandosi generalmente *parte aliquota* di un numero intiero il di lui *quoziente esatto* per un altro, un numero frazionario, od una frazione concreta, potrà considerarsi come la espressione di tante parti aliquote uguali di un certo nome (ivi n.° 5) del numero sottinteso, quante unità contiene il di lei numeratore.

Quindi è, che, come eseguendo l' addizione di più numeri intieri concreti composti, nel modo stesso insegnato intorno ai semplici nel primo Tema, s' intende di aver nel resultato la *caratteristica* di un numero, che sia la somma di tutti quelli, così pell' addizione di più frazioni del *medesimo denominatore* noi intendiamo di aver nel resultato la *caratteristica* di una nuova frazione, che sia pure la somma di tutte le parti aliquote uguali a quelle del numero sottinteso, respettivamente numerate dai numeratori di coteste frazioni, e tutte denominate dal loro denominatore comune.

Perciò distinguendo al solito le Operazioni sulle Frazioni, come pei numeri intieri, in *Dirette* ed *Inverse*, e le dirette in trè Casi, cioè di *Addizione*, *Moltiplicazione ed Elevazione a potenze*, pel

CASO I.

Addizione delle Frazioni.

Si assegna la seguente regola.

« Si riducano prima coteste frazioni al medesimo denominatore, se lo hanno diverso, nel « modo che abbiamo precedentemente insegnato « (ivi num.[i] 8, 9). Poi, riguardando i numeratori delle trasformate come numeri interi « concreti di *una certa specie*, si faccia l'addizione di tutti, ed alla somma si dia per denominatore il loro comune.

« La frazione resultante, considerata come « astratta, sarà la caratteristica della somma « delle proposte ».

Così, riducendo le trè frazioni per es. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ al medesimo denominatore 24, ch'è il più piccolo possibile, siccome resultano le trè trasformate $\frac{16}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{15}{24}$, si avrà per somma la frazione *impropria* $\frac{49}{24}$.

Se quì si fà attualmente, come sappiamo, la divisione di 49 per 24, si hà 2 per quoziente ed 1 per resto. Riguardando dunque il numeratore 49, come resultante dall' addizione del resto 1 al prodotto del quoziente 2 pel divisore o denominatore 24 (ivi n.° 14), si può giudicare, che la frazione *impropria* $\frac{49}{24}$ provenga anche dall'addizione delle due $\frac{48}{24}$, $\frac{1}{24}$, ossia $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{24}$; cioè del numero intiero 2 e della frazione *propria* $\frac{1}{24}$. Per questo motivo, invece di $\frac{49}{24}$, scriveremo $2\,\frac{1}{24}$.

Potendosi in questa guisa dalle frazioni improprie *estrarre* gl' intieri in esse contenuti, prendendo cioè per l' intiero d' una frazione impropria l' attual quoziente del suo numeratore diviso pel denominatore, ed il resto per numeratore della frazione *residua*, si sogliono ordinariamente proporre, quando abbisognino per degli esempj, delle frazioni *proprie*. Per questo motivo, mentre queste diconsi anche *genuine*, chiamansi quelle *frazioni spurie*.

Occorrendo in seguito di dovere o volere dividere un numero intiero, concreto o nò, per un altro astratto, siccome la operazione, piuttostochè eseguirsi, si potrà anche soltanto accennare (ivi n.° 3), collo scrivere il secondo numero sotto al primo separato da un taglio a guisa di frazione, così questa frazione potrà poi spezzarsi in due parti, una delle quali sia il quoziente, che resulta dall' attual divisione eseguita, e l' altra sia una frazione genuina, che abbia per numeratore il resto, e per denominatore il divisore.

È utile quì il notare, che una frazione qualunque si può anche riguardare come resultante dall' addizione di più frazioni dello stesso suo denominatore, i respettivi numeratori delle quali siano ciascuna cifra significativa del suo numeratore, seguìta respettivamente da tanti zeri, quante cifre essa vi hà dopo di se.

Del resto, quando le frazioni sono accompagnate da numeri intieri, per aver la somma degli uni e delle altre, si addizionano prima le frazioni, e poi gl' intieri, ai quali si riuniscono quelli estratti dalla prima somma, se ne contiene.

Così per aver la somma di $3\frac{1}{2}$ e $4\frac{3}{4}$, addizionando $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ si hà $\frac{5}{4}$, ossia $1\frac{1}{4}$; e però addizionando ora gl' intieri 3, 4, 1 si ha $8\frac{1}{4}$ per la somma voluta.

Parimente per aver la somma di $11\frac{3}{4}$, $4\frac{2}{3}$, $2\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $3\frac{1}{2}$, addizionando prima la frazione $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{2}$, ovvero $\frac{9}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{6}{12}$, si trova $\frac{40}{12}$, ossia $3\frac{1}{3}$ per somma, e però addizionando poi gl' intieri 11, 4, 2, 3, 3 si hà $23\frac{1}{3}$ per la somma voluta.

CASO II.

Moltiplicazione delle Frazioni.

2 Venendo alla moltiplicazione delle Frazioni noi diciamo, che

Come colla moltiplicazione di un numero intiero, considerato come concreto, per un altro numero intiero, considerato come astratto, si assegna nel prodotto la caratteristica di un multiplo, che si prende sopra di un altro multiplo di *tutto* il numero sottinteso, così colla moltiplicazione delle frazioni, la quale distingueremo in trè Casi, cioè

1.° Di una frazione considerata come concreta per un numero intiero, considerato come astratto

2.° Di un numero intiero considerato come concreto per una frazione, considerata come astratta

3.° Di una frazione considerata come concreta per un' altra frazione, considerata come astratta s' intende di respettivamente assegnare nel *prodotto*

1.° La caratteristica di un multiplo, che si prende sopra un altro multiplo di submultiplo del numero sottinteso ; ossia la caratteristica di un multiplo, che si prende sopra un altro multiplo di una *parte aliquota* del numero sottinteso

2.° La caratteristica di un multiplo di submultiplo, che si prende sopra un altro multiplo del numero sottinteso; ossìa la caratteristica di un multiplo di una *parte aliquota*, che si prende sopra un altro multiplo del numero sottinteso

3.° La caratteristica di un multiplo di submultiplo, che si prende sopra un altro multiplo di submultiplo del numero sottinteso ; ossìa la caratteristica di un multiplo di una certa *parte aliquota*, che si prende sopra un altro multiplo di una cert' *altra parte aliquota* del numero sottinteso.

Siccome adunque in virtù della proprietà seconda di sopra (§ precedente n.° 6), moltiplicando per un certo numero il numeratore di una frazione, oppure dividendo per esso (quando si può esattamente) il denominatore, non si fà, che prendere un certo multiplo del *valore* di cotesta frazione, (il qual valore è un multiplo di submultiplo del numero sottinteso (ivi n.° 4)); e viceversa, moltiplicando per un cert'altro numero il denominatore, oppure dividendo per esso (quando si può esattamene) il numeratore, non si fà che prendere un cert' altro submultiplo dal *valore* della medesima frazione, (il qual valore è anche un submultiplo d' un multiplo del numero sottinteso (ivi)), così, a tenore della precedente definizione, è facile rilevare, che nel caso.

1.° « La moltiplicazione di una frazione per un « numero intiero si farà col moltiplicare il di lei « numeratore, oppure col dividere (quando sia « possibile esattamente) il di lei denominatore, « per cotesto numero intiero

2.° « La moltiplicazione di un numero intiero « per una frazione si farà col dare a cotesto nu- « mero per denominatore quello della frazione, « e poi pel di lei numeratore moltiplicar quello « della nuova frazione, che ne risulta

3.° « La moltiplicazione di una frazione per « un' altra si farà col moltiplicare il numera- « tore e denominatore della prima respettiva- « mente pel numeratore e denominatore della « seconda; oppure col dividere (quando sia pos- « sibile esattamente) il numeratore della prima « pel denominatore della seconda, e nel tempo « stesso il denominatore pel numeratore.

« Generalmente la moltiplicazione di più fra- « zioni, ed anche di più numeri intieri tra loro « (dando a questi per denominatore la cifra 1 « (ivi n.° 5)), si potrà far sempre in ogni caso « col moltiplicare respettivamente trà loro tutti

« i numeratori, e tutti i denominatori. Siccome « poi l' uno e l' altro de' prodotti resultanti è « sempre lo stesso, comunque si permutino trà « loro i fattori, così cotesta moltiplicazione po- « trà farsi in quell' ordine, che più ci piacerà.

Passando a degli esempj,

Il prodotto della frazione $\frac{5}{9}$, moltiplicata pel numero intiero 3, sarà $\frac{15}{9}$, egualmente chè $\frac{5}{3}$, ossia $1\frac{2}{3}$.

Il prodotto del numero intiero 3, moltiplicato per la frazione $\frac{5}{9}$, sarà lo stesso di quello di $\frac{3}{9}$ *per* 5, cioè di $\frac{1}{3}$ *per* 5, che è $\frac{5}{3}$, ossia $1\frac{2}{3}$.

In generale il prodotto di un numero intiero moltiplicato per una frazione è sempre lo stesso del prodotto di cotesta frazione moltiplicata per cotesto numero intiero.

Il prodotto della frazione $\frac{5}{7}$, moltiplicata per la frazione $\frac{2}{3}$, sarà la frazione $\frac{10}{21}$, e questa, moltiplicata per $\frac{11}{13}$, ci darà per prodotto la fraz. $\frac{110}{273}$.

Pel prodotto poi delle due frazioni $\frac{15}{24}$, $\frac{3}{5}$, in luogo della frazione $\frac{45}{120}$, si avrà la frazione più semplice $\frac{3}{8}$.

Nella frazione, prodotto di più altre frazioni, il numeratore essendo o potendo essere il prodotto dei loro numeratori, ed il denominatore il prodotto dei loro denominatori, in quei casi, nei quali vi fossero per essere de' fattori comuni a questi due prodotti, è utile sopprimerli prima di eseguir la operazione.

Così per es. nel numeratore della frazione, prodotto delle quattro seguenti

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5},$$

dovendo entrare per fattori i numeri 2, 3, 5, 4, oppure 2, 3, 4, 5, 1; e nel denominatore dovendo entrare per fattori i numeri 3, 4, 6, 5, oppure 2, 3, 4, 5, 3, sopprimendo i primi quattro numeri, o fattori comuni 2, 3, 4, 5, si avrà per prodotto la frazione semplicissima $\frac{1}{3}$.

Nel caso, che si debba moltiplicare una frazione, accompagnata da un numero intiero, per un' altra, accompagnata anch' essa o nò, da un altro numero intiero, si può prima riunire il primo intiero alla prima frazione, ed il secondo alla seconda, aggiungendo a ciascun numeratore il prodotto dell' intiero pel denominatore corrispondente, e poi moltiplicar trà loro le due frazioni spurie resultanti. Indi dalla frazione prodotto si estrarranno gl' intieri in essa contenuti.

Così, dovendosi moltiplicar per esempio $7 \frac{2}{3}$ *per* $5 \frac{7}{8}$, si cangerà prima $7 \frac{2}{3}$ in $\frac{23}{3}$, e $5 \frac{7}{8}$ in $\frac{47}{8}$. Il prodotto di $\frac{23}{3}$ *per* $\frac{47}{8}$ essendo $\frac{1081}{24}$, estraendosene gl' intieri si ottiene $45 \frac{1}{24}$.

Se si vuole evitare la riunione degl' intieri alle frazioni, ed ottener direttamente il voluto prodotto, disponendo nel nostro esempio il calcolo, come segue

$$\begin{array}{r} 7 \frac{2}{3} \\ 5 \frac{7}{8} \\ \hline 35 \\ 3 \frac{1}{3} \\ 6 \frac{1}{8} \\ \frac{7}{12} \\ \hline 45 \frac{1}{24} \end{array}$$

si moltiplica 5 *per* 7, 5 *per* $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$ *per* 7, $\frac{7}{8}$ *per* $\frac{2}{3}$; ed i prodotti parziali respettivi 35, $\frac{10}{3}$, $\frac{49}{8}$, $\frac{14}{24}$, che mentalmente si riducono a 35, $3\frac{1}{3}$, $6\frac{1}{8}$, $\frac{7}{12}$, scrivendosi di mano in mano l'uno sotto l'altro, si fà poi l'addizione di tutti, a cominciar dalle frazioni scritte a destra.

Generalmente, se si avessero più frazioni accompagnate o nò da numeri intieri, e si trattasse di moltiplicar l'*insieme* o la somma di alcune per l'*insieme* o la somma delle altre, prima si potrebbero trasformare, le une separatamente dalle altre coi loro respettivi intieri, in altrettante equivalenti del medesimo denominatore, e poi addizionando pure separatamente le prime e le seconde trasformate si moltiplicherebbero trà loro le due frazioni resultanti per somme. Finalmente dalla frazione prodotto se n'estrarrebbero gl'intieri, che vi potrebbero essere contenuti.

Ma, senza stare a fare tutte coteste operazioni preliminari, noi possiamo qualchè volta giungere più speditamente al definitivo risultato nel modo seguente.

Si riguardino le prime frazioni, egualmentechè i numeri intieri, da' quali possono essere accompagnate, come *Parti* separate di un *Tutto*.

Si riguardino parimente le seconde frazioni, egualmentechè i numeri intieri respettivi, dai quali esse possono essere accompagnate, come *Parti* separate di un altro *Tutto*;

Poi sotto le prime Parti scritte le seconde, separate l'una dall'altra da virgole, si moltiplichino le parti superiori tutte di mano in mano per ciascuna delle inferiori, e scrivendo i prodotti successivi, che si ottengono, sotto una linea orizzontale, che siasi tirata, si faccia poi la somma di tutti, previe le opportune riduzioni.

Si debba per es. moltiplicare la somma di $2\,\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, per quella di $3\,\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{5}$.

Ecco il tipo del calcolo

$$
\begin{array}{l}
2,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3} \\
3,\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{5} \\
\hline
6,\ \frac{1}{2} \\
\quad 1 \\
\quad 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{6} \\
\quad 1 \qquad\qquad \frac{1}{5},\ \frac{3}{10},\ \frac{2}{5} \\
\hline
11,\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{6},\ \frac{9}{10},\ \text{ossia } 12\,\frac{23}{120}.
\end{array}
$$

È poi indifferente cominciar la moltiplicazione da sinistra, piuttostochè da destra; ma l' addizione de' prodotti si comincerà sempre da destra, per poter dalla somma delle frazioni estrarre gl' intieri, che possono esservi contenuti, e riunirgli cogli altri.

Del resto le frazioni, o numeri intieri, che quì si riguardano come *Parti* di un *Tutto*, differiscono dalle Parti, che di sopra (1) abbiamo chiamate *aliquote*, in quantochè non sono generalmente trà loro uguali, nè si considerano come quozienti esatti di un numero diviso per un altro. Esse si potrebbero chiamare *Parti aliquante*.

CASO III.

Elevazione a potenze delle Frazioni.

3. Nel caso particolare della moltiplicazione di più frazioni, che abbiano i medesimi termini respettivamente uguali, cioè siano trà loro *identiche*, è visibile, che il loro prodotto si farà coll' *elevare* ciascuno dei due termini di una di esse ad una potenza medesima, di un grado espresso dal numero di tutte; ed in questo caso consisterà la *Elevazione a potenze* delle frazioni.

Così per elevare alla seconda, terza, . . . potenza la frazione per es. $\frac{2}{3}$, elevandovi ambedue i suoi termini, si avranno le respettive frazioni $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, . . .

La seconda potenza poi, e la terza diconsi al solito respettivamente *Quadrato* e *Cubo*, come nel caso de' numeri intieri (Tema I.° pag. 54, 55); ed eccone quì pure la ragione.

Avendo spezzato in un medesimo senso un *Quadrato*, scelto a piacere, in tante *strisce* tra loro uguali, quante unità contiene il denominatore di una frazione proposta qualunque, *propria* od *impropria*, se si spezza di nuovo ciascuna di queste strisce, (che sarà certamente più lunga che larga), nel senso della sua larghezza in altrettante più piccole uguali tra loro, è facile persuadersi, che queste ultime riesciranno perfettamente quadre, e che il numero di tutte sarà precisamente espresso dalla seconda potenza del denominatore della proposta frazione. Se dunque si suppone, che il numero o soggetto concreto sottinteso, a cui una tal frazione si riferisce, esprima il primitivo quadrato, cioè sia il numero delle strisce, o caselle quadre, nelle quali esso si è spezzato, il valore della seconda potenza della frazione proposta si potrà ravvisare com'espresso soltanto dalla seconda potenza del suo numeratore, la quale esprime appunto un *Quadrato effettivo*, purchè però una tal seconda potenza si riferisca, non più al quadrato primitivo, ma bensì ad una delle caselle quadre, nelle quali egli è stato decomposto.

Parimente, avendo spezzato un *Cubo*, scelto a piacere, nel senso della sua altezza, in tanti *strati*, o *segmenti* trà loro uguali, quante unità contiene il denominatore di una frazione qualunque proposta, *propria* od *impropria*, se si spezza ciascuno di questi segmenti, (che sarà certamente più lungo e più largo, che alto), nel senso della lunghezza in altrettanti segmenti più piccoli trà loro uguali, e di nuovo ciascuno pure di questi secondi, (che sarà certamente più lungo, che largo ed alto), nel senso della larghezza in altrettanti segmenti anche più piccoli trà loro uguali, è facil persuadersi, che questi ultimi riesciranno cubi perfetti, e che il numero di tutti sarà precisamente espresso dalla terza potenza del denominatore della frazione proposta. Se dunque si suppone, che il numero, o soggetto sottinteso, a cui una tal frazione si riferisce, esprima il primitivo cubo, cioè sia il numero de' piccoli cubi uguali, nei quali esso si è spezzato, il valore della terza potenza della frazione proposta si potrà ravvisare com' espresso soltanto dalla terza potenza del suo numeratore, la quale esprime appunto un *Cubo effettivo*, purchè però una tal terza potenza si riferisca, non più al cubo primitivo, ma bensì ad uno dei piccoli cubi, nei quali egli è stato decomposto.

4. Prima di procedere oltre, facendo una breve digressione, cade quì in acconcio il far vedere, che vi sono una infinità di maniere per formare il quadrato ed il cubo di un numero qualunque intiero o frazionario proposto, seguendo sempre a tale oggetto delle regole analoghe a quelle, che abbiamo date in addietro (Tema primo, pag. 58, 63).

E primieramente considerando in un numero intiero la prima cifra a destra, (ch' è di unità), come una *prima parte* del medesimo, ed il sistema di tutte le altre a sinistra, (ch' è di diecine), come una *seconda parte*, si può asserire di aver già dimostrato,

« Che, riguardando un numero intiero qua-
« lunque come decomposto per addizione in co-
« teste due parti, per formare il di lui qua-
« drato si deve fare separatamente
« 1.° Il *quadrato* della sua prima parte
« 2.° Il *doppio* prodotto della 2.ª per la prima
« 3.° Il *quadrato* della seconda;
« E quindi sommar tutto insieme.

E che per formare il cubo di un numero intiero qualunque si deve fare separatamente
« 1.° Il *cubo* della sua prima parte

« 2.° Il *triplo* del prodotto del di lei quadra-
« to per la seconda
« 3.° Il *triplo* del prodotto di lei pel quadrato
« della seconda parte
« 4.° Il *cubo* di questa seconda parte;
« E quindi sommar tutto insieme.

Ora io dico di più, che, proposto un *qualsivoglia* numero, *comunque* questo si spezzi, o si decomponga per addizione in *due parti*, per formare il di lui quadrato *basterà* sempre seguire la prima di tali regole, e per formare il cubo *basterà* seguir la seconda.

Ed infatti per formare in primo luogo il quadrato di cotesto numero per mezzo delle due parti, nelle quali esso, come un *Tutto*, si suppone per addizione decomposto, è facil persuadersi, che bisognerà moltiplicare ciascuna di coteste due parti successivamente per la prima e per la seconda di esse stesse, e poi addizionare i prodotti, che si ottengono, i quali saranno

1.° Il prodotto della prima parte per la prima parte.
2.° Il prodotto della prima per la seconda
3.° Il prodotto della seconda per la prima
4.° Il prodotto della seconda parte per la seconda parte.

Ma il prodotto della prima parte per la prima parte, ossìa per se stessa, è il di lei *quadrato*; il prodotto della seconda per la prima essendo lo stesso, che quello della prima per la seconda, cotesti due prodotti formano insieme il *doppio* del prodotto della prima parte per la seconda; ed il prodotto della seconda parte per la seconda parte, ossia per se stessa, è il di lei *quadrato*.

Nella riunione pertanto di cotesti prodotti consiste appunto la prima delle due regole precedentemente enunciate.

Passando in secondo luogo alla formazione del cubo di qualsivoglia numero, comunque decomposto per addizione in due parti, per mezzo di queste stesse parti, siccome bisogna moltiplicare il precedente quadrato per lo stesso numero, ossìa per la prima, e per la seconda sua parte, è chiaro che dovremo primieramente moltiplicare per la prima e poi per la seconda parte i trè primi prodotti di sopra 1°, 2°, 3° del quadrato ottenuto, e quindi far l'addizione di tutti i nuovi prodotti, che si otterranno.

Ora per la prima moltiplicazione è facil vedere, che si otterrà

1.° Il *cubo* della prima parte

2.° Il *doppio* del di lei quadrato per la seconda

3.° Il prodotto di lei pel quadrato di questa.

Facendo poi la seconda moltiplicazione si avrà

4.° Il prodotto del quadrato della prima parte per la seconda

5.° Il *doppio* del prodotto di lei pel quadrato di questa

6.° Il *cubo* di questa stessa seconda parte.

Riunendo quì insieme il *doppio* prodotto 2.° col prodotto 4.°, ciò che si può, si hà

Il *triplo* del prodotto dal quadrato della prima parte per la seconda;

E riunendo il prodotto 3.° col *doppio* prodotto 5,° ciò che pure si può, si hà

Il *triplo* del prodotto della prima parte pel quadrato della seconda.

Nella riunione adunque de' prodotti 1,° 2,° 3,° 4,° 5,° 6° precedenti consiste la seconda delle regole di sopra enunciate per la formazione del cubo di un *qualsivoglia* numero, *comunque* decomposto per addizione in due parti.

In conseguenza di tali regole si vede, che per avere il quadrato di un numero intiero immediatamente *consecutivo* ad un altro, cioè che non differisca da questo che d' una unità, basterà aggiungere al quadrato del primo il suo *doppio* aumentato di una unità; e per averne il cubo basterà aggiungere al cubo del primo il *triplo* del di lui quadrato, ed inoltre il suo *triplo* aumentato di una unità.

Così ad 1, quadrato di 1, aggiungendo 3, si avrà 4 pel quadrato di 2;

A 4 aggiungendo 5, si avrà 9 pel quadrato di 3;

A 9 aggiungendo 7, si avrà 16 pel quadrato di 4;

E così di seguito.

Parimente ad 1, cubo di 1, aggiungendo 3 e 4, si avrà 8 pel cubo di 2;

Ad 8 aggiungendo 12 e 7, si avrà 27 pel cubo di 3;

A 27 aggiungendo 27 e 10, si avrà 64 pel cubo di 4;

E così di seguito.

Del resto le medesime regole hanno luogo anche per la formazione del quadrato e del cubo della *somma* di due qualsivoglia numeri, considerati come *Parti* separate di un *Tutto* unico.

5. Passando adesso alle *Operazioni inverse* sulle Frazioni, che, come pei numeri intieri, distingueremo al solito in trè Casi, cioè *Sottrazione*, *Divisione ed Estrazione delle Radici*, noi intendiamo di voler con queste distrugger l'effetto, o la mutazione, che sopra una o più frazioni proposte possono aver prodotta le Operazioni respettivamente dirette, suppostevi già praticate sopra.

E primieramente in quanto al

CASO I.

Sottrazione delle Frazioni.

Noi diciamo, che, come coll'addizione di due o più frazioni del medesimo denominatore si assegna nel resultato la caratteristica di una frazione che denoti la *somma* di tutte le parti aliquote uguali del numero sottinteso, respettivamente numerate dai numeratori di coteste frazioni (1), così nella sottrazione di una frazione da un'altra di *denominatore stesso* s' intende di assegnare nel resultato una terza frazione, che esprima la *differenza* de' numeri delle parti aliquote uguali, respettivamente espressi dai numeratori di coteste due frazioni.

Quindi per far la sottrazione di una o più frazioni qualunque da una o più altre si prescrive la seguente regola

« Si riducano prima le une e le altre tutte
« al medesimo denominatore. Poi riguardando
« i numeratori delle trasformate, come numeri
« intieri di una certa *specie*, si faccia a parte
« te l' addizione di quelli delle trasformate
« prime, ed a parte l' addizione di quelli del-
« le seconde; indi, dalla seconda somma sot-
« tratta la prima, al resto o differenza si dia
« per denominatore il loro comune.

« La frazione resultante sarà quella, che si « cerca per differenza, o per *Resto.* »

Così per le nove frazioni seguenti

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{10}, \frac{7}{15}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{12}$$

avendo di sopra (§ prec. n.° 9) trovate le nove seguenti trasformate

$$\frac{60}{120}, \frac{80}{120}, \frac{72}{120}, \frac{100}{120}, \frac{84}{120}, \frac{56}{120}, \frac{30}{120}, \frac{45}{120}, \frac{30}{120},$$

se dalla somma delle prime sei si dovranno sottrarre le altre trè, addizionando i primi sei numeratori di queste trasformate, e trovandosi 452 per somma, da questa si sottrarrà la somma 105 degli altri trè; onde otterremo per *resto* la frazione impropria $\frac{347}{120}$, che si riduce a $2\ \frac{107}{120}$.

Quando le frazioni, tralle quali si deve fare la sottrazione, sono accompagnate da numeri intieri, dopo aver fatta la sottrazione trà coteste frazioni, si fá poi quella trà i numeri intieri nel modo solito, avuto però riguardo alla circostanza, in cui qualcheduno di questi siasi dovuto già diminuire di una o più unità, perchè si potesse eseguire la prima sottrazione.

Se per esempio da $13\frac{3}{4}$ dovesse sottrarsi $3\frac{11}{13}$, ossia $3\frac{44}{52}$ da $13\frac{39}{52}$, siccome da 39 non può sottrarsi 44, aggiungendo 52 a 39, con che si hà 91, sottrarremo 44 da 91; ma bisognerà riguardare l' intiero 13 come diminuito di $\frac{52}{52}$, ossia di 1; e però si avrà per resto o differenza $9\frac{47}{52}$.

CASO II.

Divisione delle Frazioni.

6. Venendo alla Divisione delle Frazioni, ed intendendo, che il *Quoziente* di una frazione divisa per un' altra debba essere una terza frazione, la quale moltiplicata per la seconda riproduca la prima, od una frazione equivalente a lei, se si osserva, che il valore di una data frazione non si altera col moltiplicare il suo numeratore, primieramente pel numeratore e poi pel denominatore di una seconda, e nel medesimo tempo il suo denominatore, primieramen-

te pel denominatore e poi pel numeratore di questa seconda medesima, con un pò di reflessione è facile accorgersi, che il quoziente voluto di una *data* frazione, divisa per una *proposta*, sarà il prodotto della prima moltiplicata per una terza, *inversa* alla seconda, cioè per questa co' suoi termini invertiti (§ prec. n.° 5.); e così la divisione riducesi ad una moltiplicazione.

Avendosi da dividere per esempio la frazione $\frac{3}{5}$ per la frazione $\frac{8}{11}$, siccome moltiplicando il numeratore 3 della prima per 8 e per 11, termini della seconda, ed insieme il denominatore 5 per 11 e per 8, termini invertiti della seconda medesima; ossia moltiplicando la prima frazione $\frac{3}{5}$ prima per $\frac{8}{11}$ e poi per $\frac{11}{8}$, il di lei valore rimane lo stesso, così il quoziente di $\frac{3}{5}$ *per* $\frac{8}{11}$ sarà il prodotto di $\frac{3}{5}$ *per* $\frac{11}{8}$, cioè $\frac{33}{40}$. Di qui la seguente regola

« Per dividere una frazione per una o più
« altre successive s' invertano primieramente i
« termini di queste, e poi si moltiplichi la prima
« di mano in mano per ciascuna delle *inverse*
« ottenute. »

e questa regola servirà anche al caso particolare della divisione di una frazione per un numero intiero e viceversa, quando a questo si dia l' aspetto di frazione (§ precedente n.° 5)

Così per esempio il quoziente della frazione $\frac{9}{10}$ divisa pel numero intiero 3, scrivendosi in luogo di questo $\frac{3}{1}$, sarà il prodotto di $\frac{9}{10}$ *per* $\frac{1}{3}$, cioè $\frac{9}{30}$, oppure $\frac{3}{10}$.

Viceversa il quoziente del numero intiero 3 per la frazione $\frac{9}{10}$ sarà il prodotto di $\frac{3}{1}$ *per* $\frac{10}{9}$, cioè $\frac{30}{9}$, oppure $\frac{10}{3}$, ossia $3\,\frac{1}{3}$.

Il quoziente poi della frazione $\frac{3}{5}$ successivamente divisa per $\frac{8}{11}$ e per $\frac{9}{10}$ sarà il prodotto di $\frac{3}{5}$ *per* $\frac{11}{8}$ *per* $\frac{10}{9}$, cioè $\frac{330}{360}$, che si riduce a $\frac{11}{12}$.

Sarà qui ben osservare, che, dovendosi fare più divisioni, egualmentechè più moltiplicazioni, di frazioni, o numeri intieri successivamente trà loro, siccome invertendo i termini di quelle frazioni o numeri intieri, messi sotto la forma di frazioni, per cui si devono fare le divisioni, queste si cangiano in moltiplicazioni, e d' altronde per la moltiplicazione di quali e quante mai si vogliano frazioni trà loro basta moltiplicar trà loro separatamente i numeratori, ed i denominatori di tutte, ciascuno in quell' ordine, che più ci pare (2), così è chiaro, che l' ordine delle divisioni, egualmentechè quello delle moltiplicazioni, tralle proposte frazioni, potrà comunque invertirsi, o ciascuno separatamente, o l' uno e l' altro insieme.

Si può anche notare, che come il valor del prodotto di una frazione per un' altra riesce minore o maggiore del valor della prima, secondochè la seconda è *propria*, od *impropria*, così il valor del quoziente di una frazione per un' altra riesce viceversa nel medesimo caso maggiore o minore.

Quando si hà da dividere una frazione per un' altra accompagnata da un numero intiero, aggiungendo al numeratore di questa il prodotto dell' intiero pel denominatore, per la frazione impropria, che ne risulta, invertita si moltiplicherà la prima, che potrà esser pure anch' essa accompagnata da un' intiero.

Così, se si hà da dividere per esempio $12\frac{3}{4}$ per $6\frac{2}{3}$, formando di $6\frac{2}{3}$ la frazione $\frac{20}{3}$, per questa invertita, cioè per $\frac{3}{20}$ moltiplicheremo $12\frac{3}{4}$.

Ecco il tipo del calcolo

$$\begin{array}{r} 12\,\frac{3}{4} \\ \frac{3}{20} \\ \hline 1\,\frac{16}{20} \\ \frac{9}{80} \\ \hline 1\,\frac{73}{80} \end{array}$$

Generalmente, se la somma di più frazioni dee dividersi per la somma di più altre, riguardando le prime come *Parti* di un *Tutto* (2) e riunite le seconde trà loro in una frazione sola, per questa invertita si moltiplicherà ciascuna di quelle, e poi si addizioneranno i prodotti.

Così avendosi a dividere $3\frac{4}{5}$ e $\frac{7}{8}$ per la somma di $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{9}$, riunite queste due ultime frazioni nella fraz. $\frac{7}{9}$, moltiplicheremo $3\frac{4}{5}$ e $\frac{7}{8}$ per $\frac{9}{7}$.

Ecco il tipo del calcolo

$$\begin{array}{c} 3,\ \frac{4}{5},\ \frac{7}{8} \\ \frac{9}{7} \\ \hline 3\ \frac{6}{7} \\ 1\ \frac{1}{35} \\ 1\ \frac{1}{8} \\ \hline 6\ \frac{3}{280} \end{array}$$

7. Prima di procedere oltre, cade quì in acconcio il far vedere, come per mezzo di successive divisioni si può far prendere ad una frazione una forma assai singolare, degna di essere attentamente esaminata.

A quest' oggetto cominceremo primieramente dall' osservare, che il quoziente del numero intiero 1 per la frazione impropria per es. $\frac{2961}{799}$ è, per ciò che precede, la frazione propria inversa $\frac{799}{2961}$.

Se dunque, come per semplicemente denotare la operazione della divisione di un numero intiero concreto per un altro qualunque astratto, in conformità a ciò, che abbiamo anche in addietro (§ 1 n.° 3) insinuato, si scrive il primo sopra ed il secondo sotto al taglio —, così per denotare *semplicemente pure* la operazione da farsi della divisione del numero intiero concreto 1 per la frazione impropria astratta $\frac{2961}{799}$, (ove il taglio denoti divisione da farsi), *convenghiamo* di scrivere nello stesso modo il primo sopra e la seconda sotto ad un altro taglio ——, è visibile, che in luogo della frazione $\frac{799}{2961}$ potremo anche scrivere $\frac{1}{\frac{2961}{799}}$. Ma quì in luogo di $\frac{2961}{799}$ scrivendo pur per convenzione $3\,\frac{564}{799}$, accaderà, che in luogo della frazione $\frac{799}{2961}$ potremo anche scrivere $\frac{1}{3\,\frac{564}{799}}$. Per le stesse convenzioni in luogo di $\frac{564}{799}$ scrivendo $\frac{1}{\frac{799}{564}}$, oppure $\frac{1}{1\,\frac{335}{564}}$; ed in luogo di $\frac{335}{564}$

scrivendo $\frac{1}{\frac{564}{335}}$, oppure $\frac{1}{2\,\frac{94}{235}}$; ed in luogo di $\frac{94}{235}$

scrivendo $\frac{1}{\frac{235}{94}}$, oppure $\frac{1}{2\,\frac{47}{94}}$; ed in luogo di $\frac{47}{94}$

scrivendo $\frac{1}{\frac{94}{47}}$, oppure $\frac{1}{2}$, accaderà pure che in luogo della fraz. $\frac{799}{2961}$ proposta (§ prec. n.° 13), potremo successivameute scrivere l' espressioni

$$\frac{1}{3\,\frac{564}{799}},\quad \frac{1}{3\,\cfrac{1}{1\,\frac{235}{564}}},\quad \frac{1}{3\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{2\,\frac{94}{235}}}},\quad \frac{1}{3\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{2\,\frac{47}{94}}}}}$$

$$\frac{1}{3\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{2}}}}}$$

l'ultima delle quali è quella sotto la forma voluta.

Nello stesso modo non è difficil vedere, che in luogo delle due frazioni (ivi) $\frac{317}{873}$, $\frac{16768}{252801}$ si potranno respettivamente scrivere le due espressioni seguenti

$$\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{15\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{2}}}}}}}\;,\qquad \cfrac{1}{15\,\cfrac{1}{13\,\cfrac{1}{11\,\cfrac{1}{7\,\cfrac{1}{5\,\cfrac{1}{3}}}}}}$$

Questa *specie singolare* di frazioni, che sono una frazione ordinaria, di cui il numeratore è la unità, ed il denominatore un numero intiero accompagnato da una frazione, di cui il numeratore è parimente la unità ed il denominatore è un numero intiero accompagnato da una frazione, di cui . . . , diconsi *Frazioni continue.*

Ci basti l' aver quì soltanto *indicata* la origine di tali frazioni.

CASO III.

Estrazione delle Radici delle Frazioni.

8. Distinguendo al solito le radici delle Frazioni in *perfette* ed *imperfette* come pei numeri intieri (Tema II.°, pag. 26), noi intendiamo per radice quadrata, cubica . . . *perfetta* di una

proposta frazione un' altra frazione, di cui facendo respettivamente il quadrato, il cubo, . . . resulti precisamente la frazione proposta medesima, la quale si dirà perciò una potenza *perfetta* della seconda; e per radice quadrata, cubica, . . . *imperfetta* noi intendiamo un' altra frazione, di cui facendo pure respettivamente il quadrato, il cubo, . . . resulti una terza frazione più piccola della proposta, ma tale, che ogni altra *del medesimo denominatore* non possa *esprimere*, come suol dirsi, *più da vicino* il valore della proposta medesima, la quale a vicenda si dirà una potenza *piucchè perfetta* della radice trovata.

Il caso di radice perfetta ha luogo evidentemente, quando i termini della frazione proposta, *primi trà loro*, sono ambedue potenze perfette, ciascuno del medesimo grado della radice, che si vuole estrarre; ed in questo caso è chiaro, che, seguendo la regola inversa a quella per la Elevazione a potenze (3), bisognerà estrarre la radice dall' uno e dall' altro termine separatamente; e la frazione, che ne resulterà dopo questa doppia operazione, sarà la radice perfetta voluta.

Così i termini della frazione per es. $\frac{49}{100}$ essendo quadrati perfetti, uno di 7 e l' altro di 10, la di lei radice quadrata perfetta sarà $\frac{7}{10}$; ed i termini della frazione per es. $\frac{8}{27}$ essendo cubi perfetti respettivamente di 2 e di 3, la radice cubica perfetta di lei sarà $\frac{2}{3}$.

Il caso poi di radice imperfetta s' incontra, quando i termini della frazione proposta, *primi trà loro*, non sono contemporaneamente ambedue potenze perfette del medesimo grado della radice, che vuolsi estrarre.

In questo caso è facile persuadersi, che otterremo l' intento col moltiplicare i due termini della frazione proposta per un numero tale, che il denominatare divenga una potenza perfetta di cotesto grado; giacchè allora estraendo separatamente da esso la radice perfetta, e la imperfetta dal nuovo numeratore, questa divisa per quella col semplice taglio —, sarà la radice imperfetta, che si cerca.

Così volendosi la radice quadrata imperfetta della frazione per es. $\frac{5}{24}$, se si moltiplicano ambedue i suoi termini per 6, resulterà la trasformata equivalente $\frac{30}{144}$, in cui la radice perfetta del denominatore essendo 12, e 5 la imperfetta del numeratore, si avrà $\frac{5}{12}$ per la radice quadrata imperfetta voluta.

Parimente volendosi la radice cubica imperfetta della frazione per es. $\frac{3}{32}$, se si moltiplicano ambedue i suoi termini per 16, resulterà la trasformata equivalente $\frac{48}{512}$, in cui la radice perfetta del denominatore essendo 8, e 3 la imperfetta del numeratore, si avrà la frazione $\frac{3}{8}$ per la radice cubica imperfetta voluta.

Del resto proposta una frazione, *ridotta ai minimi termini*, di cui il denominatore non sia potenza perfetta di un certo grado, moltiplicando in ogni caso un tal denominatore per una sua potenza di un grado inferiore di una unità a quella voluta, egualmentechè il numeratore, si avrà una trasformata, il denominatore della quale sarà la potenza perfetta voluta

Così moltiplicando i due termini della frazione per es. $\frac{2}{3}$ per 3, 9, 27, . . . , potenze prima, seconda, terza . . . , respettive del denominatore 3 si hanno le trasformate equivalenti $\frac{6}{9}$, $\frac{18}{27}$, $\frac{54}{81}$, . . . , i denominatori delle quali sono respettivamente la seconda, terza, quarta, . . . potenza del medesimo denominatore 3.

9. Ponendo quì fine al Tema sulle Frazioni in generale, da quanto abbiamo precedentemente detto sembra potersi rilevare, che non essendo esse altro per noi, che *mere caratteristiche di operazioni*, cioè di moltiplicazioni, e divisioni insieme, da farsi sopra un *numero arbitrario sottinteso*, le nuove Operazioni, che abbiamo fin quì insegnate intorno alle medesime, si *cumulano*, per così dire, sulle operazioni prime in modo, che non restano poi a farsi sul numero medesimo sottinteso (*soggetto finale comune di tutte*), che delle operazioni simili, cioè delle moltiplicazioni e delle divisioni soltanto.

PREZZO

Una Lira